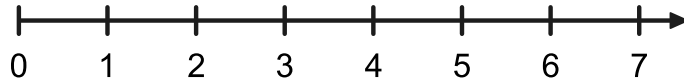


1 Brüche

1.1 Definitionen

Bisher haben wir mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... gerechnet. Diese Zahlen heißen **natürliche Zahlen** und wir haben sie auf dem Zahlenstrahl dargestellt.



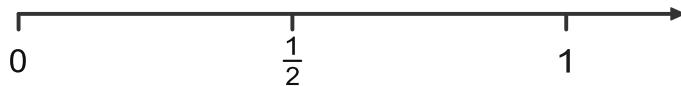
Mit den natürlichen Zahlen können wir z. B. ganze Dinge wie Tomaten, Sonnenaufgänge oder Ideen zählen. Wir können diese Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

Eine Tomate können wir in 4 gleiche großen Teile teilen. Auch mit diesen Teilen können wir rechnen. Wenn wir zwei dieser Teile und weitere zwei dieser Teile zusammenfügen, erhalten wir wieder eine ganze Tomate. Aber es ist nicht $2 + 2 = 1$.

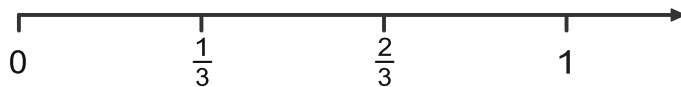
Wenn wir also mit Teilen eines Ganzen rechnen wollen, brauchen wir andere Zahlen, nämlich solche, die sich auf dem Zahlenstrahl zwischen den natürlichen Zahlen befinden.



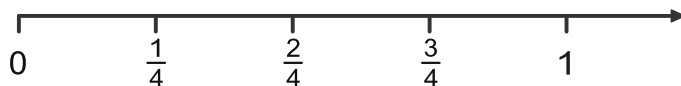
Die Zahl, die genau in der Mitte zwischen 0 und 1 liegt, nennen wir: $\frac{1}{2}$ (gesprochen: ein Halb).



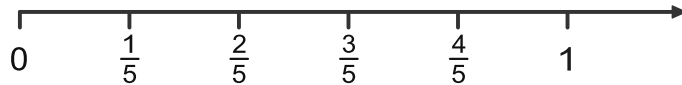
Teilen wir ein Ganzes - also die Strecke zwischen 0 und 1 - in drei gleich große Teile, entstehen die Zahlen $\frac{1}{3}$ (gesprochen: ein Drittel) und $\frac{2}{3}$ (gesprochen: zwei Drittel).



Teilen wir ein Ganzes in 4 gleich große Teile, entstehen die Zahlen $\frac{1}{4}$ (gesprochen: ein Viertel), $\frac{2}{4}$ (gesprochen: zwei Viertel) und $\frac{3}{4}$ (gesprochen: drei Viertel).



Wenn wir ein Ganzes in 5 gleiche Teile teilen, entstehen Fünftel.



Auf diese Weise können wir noch viele weitere Zahlen bilden. Diese Zahlen nennen wir **Brüche**. Ein **Bruch** besteht aus einem **Bruchstrich**, einer ganzen Zahl über dem Bruchstrich und einer ganzen Zahl unter dem Bruchstrich. Die Zahl über dem Bruchstrich heißt **Zähler** und die Zahl unter dem Bruchstrich heißt **Nenner**.

$$\text{Bruch} \left\{ \begin{array}{l} \text{Zähler} \\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \\ \text{Bruchstrich} \\ \text{Nenner} \end{array} \right.$$

Definition: Brüche sind Zahlen, die durch das Einteilen eines Ganzen in gleich große Teile entstehen. Der Nenner eines Bruchs gibt an, aus *welchen* Teilen der Bruch besteht und der Zähler eines Bruchs gibt an, aus *wie vielen* dieser Teile der Bruch besteht.

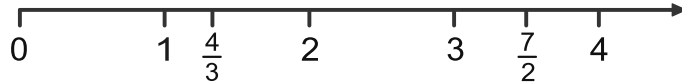
Ein Bruch wird auch als **rationale Zahl** bezeichnet.

Alle Brüche zusammen bilden die **Menge der rationalen Zahlen**. Diese Menge bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathbb{Q}$.

1.2 Weitere Eigenschaften

1. Brüche größer als 1

Brüche können auch größer als 1 sein. Z.B. liegen die Brüche $\frac{4}{3}$ und $\frac{7}{2}$ (gesprochen: sieben Halbe) rechts der 1.



2. Nenner sind ungleich 0

Wir haben Brüche als Zahlen erklärt, die entstehen, wenn ein Ganzes in gleich große Teile geteilt wird. Weil man aber nichts in 0 Teile teilen kann, legen wir fest, dass es keine Brüche mit dem Nenner 0 geben soll. Denn selbst dann, wenn wir ein Ganzes überhaupt nicht teilen, besteht es aus *einem* Teil und nicht aus gar keinem.

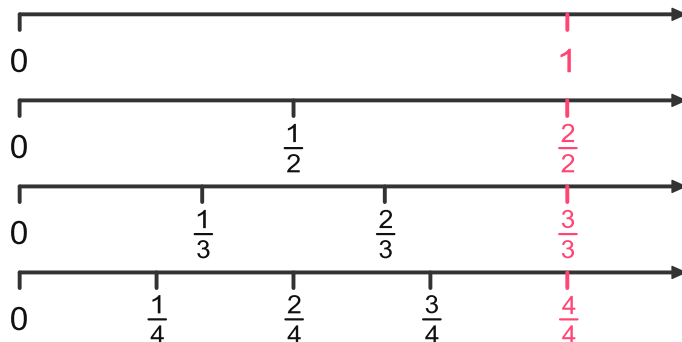
3. Der Nenner kann gleich 1 sein.

Wir legen fest, dass der Bruch $\frac{1}{1}$ (gesprochen: ein Ganzes) gleich 1 sein soll. Weiter soll $\frac{2}{1}$ (gesprochen: zwei Ganze) gleich 2 sein, $\frac{3}{1}$ soll gleich 3 sein usw.

4. Mehrere Zahlen an der gleichen Stelle

Wenn wir ein Ganzes in

- 2 gleich große Teile teilen, sind 2 dieser Teile so groß wie ein Ganzes.
- 3 gleich große Teile teilen, sind 3 dieser Teile so groß wie ein Ganzes.
- 4 gleich große Teile teilen, sind 4 dieser Teile so groß wie ein Ganzes.

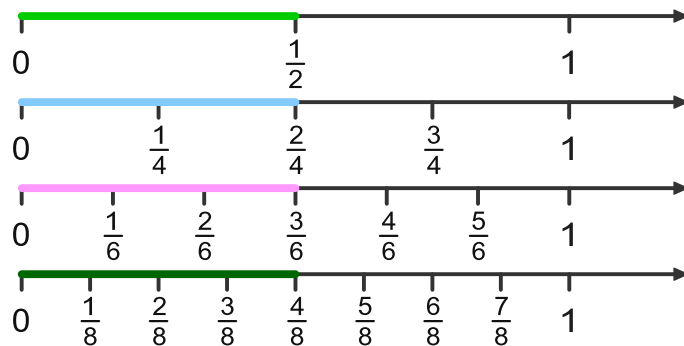


Wir legen deshalb fest: Dort, wo sich auf dem Zahlenstrahl die 1 befindet, befinden sich auch noch andere Zahlen. Es gilt:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots$$

Auch an anderen Stellen auf dem Zahlenstrahl befinden sich mehrere Zahlen.
Wenn wir ein Ganzes in

- 2 gleich große Teile teilen, ist eines dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.
- 4 gleich große Teile teilen, sind 2 dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.
- 6 gleich große Teile teilen, sind 3 dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.
- 8 gleich große Teile teilen, sind 4 dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$.



Es gilt:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

Das Gleiche gilt auch für andere Brüche, z. B.:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots \text{ und}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{12}{28} = \dots$$

Wir werden diese Zusammenhänge begründen, wenn wir uns mit dem Erweitern von Brüchen beschäftigen. Was wir aber jetzt schon vermuten können:

Ist der Nenner eines Bruchs doppelt so groß wie der Zähler,
ist der Bruch gleich $\frac{1}{2}$.

Ist der Nenner eines Bruchs dreimal so groß wie der Zähler,
ist der Bruch gleich $\frac{1}{3}$.

5. Je größer der Nenner, desto kleiner die Teile

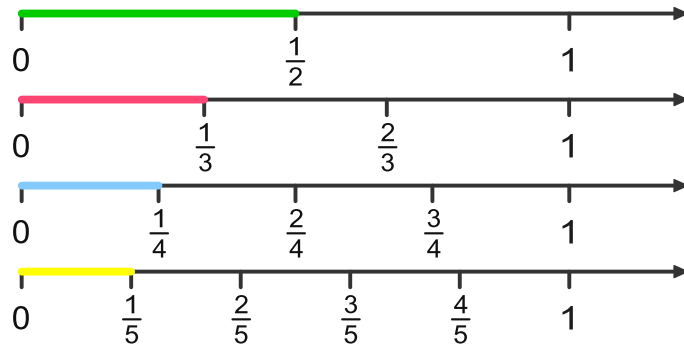
Wenn wir ein Ganzes in zwei gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile so groß wie $\frac{1}{2}$. Wenn wir ein Ganzes in *mehr* als zwei gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile *kleiner* als $\frac{1}{2}$. Deshalb ist z. B.

$$\frac{1}{3} \text{ kleiner als } \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} \text{ kleiner als } \frac{1}{2},$$

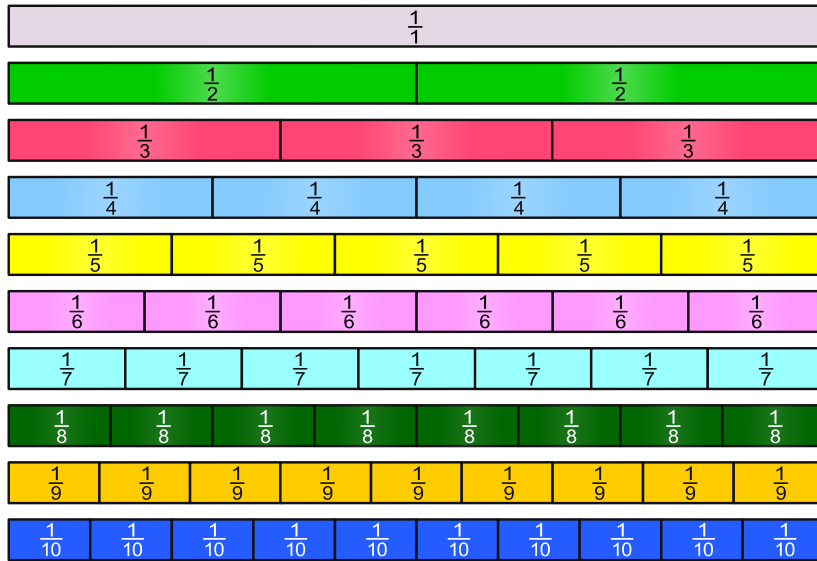
$$\frac{1}{5} \text{ kleiner als } \frac{1}{2} \text{ usw.}$$

Wenn wir ein Ganzes in mehr als drei gleich große Teile teilen, ist jedes dieser Teile *kleiner* als $\frac{1}{3}$. Z. B. sind $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ usw. jeweils kleiner als $\frac{1}{3}$.



1.3 Bruchstreifen

Um uns Brüche und deren Gesetzmäßigkeiten gut vorstellen zu können, verwenden wir Bruchstreifen. Hier sind die Bruchstreifen bis zu Zehnteln.



Die Bruchstreifen können wir auf den Zahlenstrahl legen.

